Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (11) Lineární zobrazení I

Definice 1 (Lineární zobrazení) *Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je* lineární *pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení) *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$, $B_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bázi U nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \ldots, y_m\}$ bázi V nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Potom matice ${}_{B_2}[f]_{B_1} \in \mathbb{T}^{m\times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá* matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2.

Definice 3 (Izomorfismus) *Lineární zobrazení f je* isomorfismus *pokud je prosté a „na".*

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : R \to R$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_1(x) = 0$
(b) $f_2(x) = 1$
(c) $f_3(x) = 2x$
(d) $f_4(x) = x + 1$
(e) $f_5(x) = x^2$
(f) $f_6\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, x - y)$

Řešení:

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:
   i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí
   ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

   Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:
   i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí
   ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zdali zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa" $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

   Obě podmínky nejsou splněny, zobrazení není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:
   i. $f_3(x+y) = f_3(z) = 2z = 2(x+y) = 2(x)+2(y) = f_3(x)+f_3(y)$ podmínka platí
   ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$ podmínka platí.

Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

(d) Nejde o lineární zobrazení $f_4(x+y) = x+y+1 \neq x+y+2 = f_4(x)+f_4(y)$.

(e) Nejde o lineární zobrazení $f_5(x+y) = x^2+2xy+y^2 \neq x^2+y^2 = f_5(x)+f_5(y)$.

(f) Jde o lineární zobrazení:

i. $f_6\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2, x_1+x_2-y_1-y_2) = (x_1+y_1, x_1-y_1, x_1-y_1)+(x_2+y_2, x_2-y_2, x_2-y_2) = f_6\big((x_1,y_1)\big)+f_6\big((x_2,y_2)\big)$

Cv. 2. Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

(a) Osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

(b) Otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

(c) Projekce na první souřadnici $p_1 : (x,y) \to (x,0)$.

Řešení:

Pro sestavení matice A_f zobrazení f, potřebujeme určit kam se zobrazí báze prostoru. Pokud máme bázi $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ a sestrojíme matici A_f takovou, že pro všechny bazické vektory $u \in B$ platí, že $A_f u = f(u)$, tak díky linearitě maticového násobení je matice A_f matice zobrazení f.

Pro vektory kanonické báze e_i (kde e_i je vektor s 1 na pozici i a jinak se samými 0). Tedy pro libovolnou matici A platí, že Ae_i je i-tý sloupec matice A. Matici zobrazení f tedy sestrojíme tak, že sloupce matice A_f tvoří vektory $f(e_i)$, tedy obrazy kanonické báze.

(a) Stačí určit obrazy vektorů kanonické báze $e_1 = (1,0)^T$ a $e_2 = (0,1)^T$ vůči téže bázi K při osové souměrnosti f. Zřejmě $[f(e_1)]_K = f(e_1) = (0,1)^T$ a podobně $f(e_2) = (1,0)^T$.

Z nich již snadno sestavíme matici osové souměrnosti $[f] = \Big(f(e_1), f(e_2)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Je třeba určit délky přilehlých a protilehlých odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku daným úhlem α. Tedy vektor $(1,0)$ se otočí na vektor $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Matice otočení $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(c) Matice projekce je $[p_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 3. Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2,4,1)^T$, $u_2 = (2,3,4)^T$ a $u_3 = (3,0,1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2,1,2)^T$, $f(u_2) = (0,4,1)^T$ a $f(u_3) = (4,4,1)^T$.

Řešení:

Vycházíme z maticové rovnice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Tuto přinásobíme zprava maticí $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Maticí zobrazení je tedy $[f] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Cv. 4. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Je f prosté?

(b) Je f na?

(c) Je f izomorfismem?

(d) Existuje k f inverzní zobrazení?

(e) Určete bázi a dimenzi jádra zobrazení $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

(f) Určete bázi a dimenzi obrazu zobrazení $\dim(f(\mathbb{R}^3))$.

Řešení:

(a) $\mathrm{rank}(A_f) = 2$. Buď $g : U \to V$ lineární zobrazení, pak $\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(g(U))$. Tedy $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - rank(f) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne, že zobrazení f není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí A_f není prosté, protože nemá lineárně nezávislé sloupce.

(b) Pro lineární zobrazení platí, že $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(A_f)) = \mathrm{rank}(A_f)$. Tedy $\dim(f(U)) < \dim(\mathbb{R}^3)$ a f není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí A_f není „na“ protože, protože nemá lineárně nezávislé řádky.

(c) Jelikož není zobrazení f prosté a „na“, nejedná se o izomorfismus. Alternativně, nejedná se o izomorfismus, protože matice A_f není regulární.

(d) Jelikož není zobrazení izomorfismem, nemá inverzní zobrazení.

(e) Prostor $\mathrm{Ker}(f)$ obsahuje vektory, které f zobrazí na 0. Tedy $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A_f)$. Hledáme tedy bázi prostoru řešení homogenní soustavy zadané maticí A_f.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy v $\mathrm{Ker}(f)$ jsou vektory (x, y, z) pro které platí, že $x = -z$ a $y = -z$. Tedy vektory $(-z, -z, z)$ pro libovolné z. Bázi tedy tvoří například vektor $(-1, -1, 1)$ a dimenze jádra je 1.

(f) Obraz f se rovná sloupcovému prostoru A_f. Tedy z odstupňovaného tvaru, můžeme určit, že báze $\mathcal{S}(A_f)$ je tvořena například vektory $(1, 2, -3)$ a $(-1, 0, 1)$.

Cv. 5. Rozhodněte a zdůvodněte, zda-li jsou vektorové prostory U a V izomorfní a tento izomorfismus nalezněte. Existuje, více izomorfismů mezi prostory U a V?

$$U = Span\big((1, 0, 0), (0, 1, 0)\big), V = Span\big((3, 2, 1), (1, 1, 1)\big)$$

Řešení:
Ano, například přes zobrazení $(1, 0, 0) \to (3, 2, 1)$ a $(0, 1, 0) \to (1, 1, 1)$. Izomorfismů existuje více, pro každou bázi $B = (b_1, b_2)$ prostoru V můžeme definovat zobrazení $(1, 0, 0) \to b_1$ a $(0, 1, 0) \to b_2$.

Cv. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^k = f \circ f^{k-1}$. Ukažte, že pro libovolné $i \geq 1$ platí, že $\mathrm{Ker}(f^i) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

Řešení:
Napřed si zobrazení f vyjádříme maticí $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tedy $\forall v \in \mathbb{R}^n : f(v) = Av$. Navíc ale máme $\forall v \in \mathbb{R}^i : f^i(v) = A^i v$.

Pokud $v \in \mathrm{Ker}(f^i)$, pak $f^i(v) = 0$, tedy $A^i v = 0$. Pak ale jistě

$$A^{i+1}v = A(A^i v) = A0 = 0.$$

Tedy $v \in \mathrm{Ker}(f^i) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(f^{i+1})$, tudíž $\mathrm{Ker}(f^i) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

Cv. 7. Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

Řešení:
Nechť dimenze prostoru $\ker(A) \cap \mathcal{S}(B)$ a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je jeho báze, doplňme ji na bázi celého $\mathcal{S}(B)$ pomocí vektorů $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$. Pak $\mathrm{rank}(B) = \dim(\mathcal{S}(B)) = k+\ell$. Chceme ukázat, že $\mathrm{rank}(AB) = \dim\big(\mathcal{S}(AB)\big) = \ell$. Uvědomme si, že obraz AB můžeme zkoumat zkoumáním toho, kam A zobrazí bázi $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell$. Bázi $v_1, \ldots, v_k$ zobrazí na nulový vektor. Ukážeme, že vektory $Aw_1, \ldots, Aw_\ell$ jsou lineárně nezávislé. Mějme jejich nulovou lineární kombinaci

$$0 = \alpha_1 Aw_1 + \alpha_2 Aw_2 + \cdots + \alpha_\ell Aw_\ell = A(\alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_\ell w_\ell).$$

Z definice $w_1, \ldots, w_\ell$ víme, že žádná jejich netriviální kombinace není v $\ker(A)$. Tedy všechny α_i musí být nulové. A z toho vyplývá, že $\mathrm{rank}(AB) = \ell$.