Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (10) Maticové prostory

Definice 1 *Pro matici $A \in \mathbb{T}^{n\times m}$ (kde $\mathbb{T}$ je těleso) definujeme následující prostory:*

1. Řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{Span}\{A_{1,*}, \dots, A_{n,*}\}$, *tedy jako lineární obal řádků matice A.*
2. Sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{Span}\{A_{*,1}, \dots, A_{*,m}\}$, *tedy jako lineární obal sloupců matice A.*
3. Jádro $\mathrm{Ker}(A) = \big\{x \in \mathbb{T}^m | Ax = 0\big\}$, *tedy prostor řešení homogenní soustavy zadané maticí A.*

Cv. 1. Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2. Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 3. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,

(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 5. Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Cv. 6. Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Cv. 7. Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?