Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (10) Maticové prostory

Definice 1 *Pro matici $A \in \mathbb{T}^{n\times m}$ (kde $\mathbb{T}$ je těleso) definujeme následující prostory:*

1. Řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \operatorname{Span}\{A_{1,*}, \dots, A_{n,*}\}$, *tedy jako lineární obal řádků matice A.*
2. Sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \operatorname{Span}\{A_{*,1}, \dots, A_{*,m}\}$, *tedy jako lineární obal sloupců matice A.*
3. Jádro $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^m | Ax = 0\}$, *tedy prostor řešení homogenní soustavy zadané maticí A.*

Cv. 1. Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Nejprve převedeme matici na (redukovaný) odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenzi řádkového a sloupcového prostoru matice můžeme zjistit pomocí hodnosti matice, platí vztah

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ dostaneme přímo z nenulových řádků v odstupňovaném tvaru $\operatorname{RREF}(A)$, tedy

$$B_{\mathcal{R}(A)} = \left\{ \left(1, 0, 1, \frac{3}{2}\right)^T, \left(0, 1, 1, -\frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Bázi sloupcového prostoru vybereme z původních sloupcových vektorů matice A. Volíme sloupce, které odpovídají bázickým sloupcům $\operatorname{RREF}(A)$, t.j. první a druhý sloupec:

$$B_{\mathcal{S}(A)} = \left\{(1, 3, 4)^T, (1, 1, -4)^T\right\}.$$

Cv. 2. Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1, 2)^T \in \operatorname{Ker}(A)$,

(b) $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n : Ax = o\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{Span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax : x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $(1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = o$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = (1,2)^T$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří do jádra matice A, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

(a) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 3. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\operatorname{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Převedeme matici A do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy $(1, 2, 0, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T$.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$ a $(2, 1, 1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = o$. Množinu všech řesení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) = (-2, 1, 0, 0)x_2 + (-1, 0, -1, 1)x_4.$$

Bázi $\operatorname{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2, 1, 0, 0)^T, (-1, 0, -1, 1)^T$.

Cv. 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$,

(b) $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí, např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\operatorname{Span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \operatorname{Span}\{(0, 0)^T, (1, 0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani opačná implikace, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B) = A$, ale zároveň

$$\operatorname{Span}\left\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{Span}\left\{(0, 1)^T, (0, 0)^T\right\}.$$

Cv. 5. Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Řešení:

Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice a převedeme ji do (redukovaného) odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý, bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3,1,5,4)^T$, $v_2 = (2,2,3,3)^T$ a $v_4 = (1,3,1,1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, platí

$$v_3 = (1,-1,2,1)^T = 1 \cdot (3,1,5,4)^T + (-1) \cdot (2,2,3,3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1,-1,0)$.

Cv. 6. Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je nanejvýš

$$\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A+B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\mathrm{rank}(A+B) = \dim \mathcal{S}(A+B) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Cv. 7. Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$?

Řešení:

(a) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = 0$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0,$$

dostaneme tedy inkluzi $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \ldots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\mathrm{Ker}(AB) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$, a tedy $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$. Nechť $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = 0$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((AB)x) = A^{-1}0 = 0,$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Ker}(B)$.