

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):

(9) Báze, dimenze

Buď V vektorový prostor nad \mathbb{T} a mějme vektory $v_1, \dots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost) Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal vektorů v_1, \dots, v_n je

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

Definice 3 (Báze) Vektory v_1, \dots, v_n tvoří bázi V pokud jsou lineárně nezávislé a

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V.$$

Definice 4 (Dimenze) Dimenze V je velikost jeho libovolné báze.

Cv. 1. Určete průnik následujících poprostorů \mathbb{R}^3 : $U = \text{Span}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$ a $V = \text{Span}((0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Cv. 2. Ve vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cv. 3. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V .

(a) $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cv. 4. Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Cv. 5. Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru \mathbb{Z}_5^7 .

(a) $U = \text{Span}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$.

(b) $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$.

Cv. 6. Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.