

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):

(9) Báze, dimenze

Buď V vektorový prostor nad \mathbb{T} a mějme vektory $v_1, \dots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost) Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal vektorů v_1, \dots, v_n je

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

Definice 3 (Báze) Vektory v_1, \dots, v_n tvoří bázi V pokud jsou lineárně nezávislé a

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V.$$

Definice 4 (Dimenze) Dimenze V je velikost jeho libovolné báze.

Cv. 1. Určete průnik následujících poprostorů \mathbb{R}^3 : $U = \text{Span}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$ a $V = \text{Span}((0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Cv. 2. Ve vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Řešení:

Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$ dáme do sloupců matice a vektor $(3, 2, 4)$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Dostaneme $x_3 = 2$, $x_2 = p$ a $x_1 = 1 + 3p$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 + 3p) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$ netvoří bázi \mathbb{Z}_5^3 .

Cv. 3. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V .

(a) $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Řešení:

- (a) Prostor V má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor. Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M . Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze.

Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bázi prostoru \mathbb{R}^4 .

- (b) Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V , nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

- Cv. 4.** Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Řešení:

Hledáme taková $(b_1, \dots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3v_4 + b_4v_2 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

- Cv. 5.** Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru \mathbb{Z}_5^7 .

- (a) $U = \text{Span}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$.
- (b) $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$.

Řešení:

- (a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změňme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1, 2, 3, 2, 2, 4, 3)^T$, $(0, 1, 1, 0, 2, 3, 1)^T$, $(0, 0, 1, 3, 1, 3, 1)^T$.

- (b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Např. pro V máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

S řešením $x = p_1(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T + p_2(1, 0, 2, 1, 0, 0, 0)^T + p_3(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^T + p_4(1, 0, 4, 0, 0, 3, 1)^T$.

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, m.j. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 2, 1, 0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^T$, $(1, 0, 4, 0, 0, 3, 1)^T$.

- Cv. 6.** Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Řešení:

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \subset U$. Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. Stačí ověřit, jestli $\dim(\text{Span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 1 | 1 |
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze $U \subset V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V .