

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):**  
**(8) Lineární závislost a nezávislost**

**Definice 1 (Lineární nezávislost)** Vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  nastane pouze pro  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

---

**Cv. 1.** Zjistěte zda jsou vektory z  $\mathbb{R}^3$  lineárně nezávislé:

(a)  $(2, 3, -5), (1, -1, 1), (3, 2, -2)$ .

(b)  $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$ .

**Cv. 2.** Necht  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a)  $\{u, u + v, u + w\}$ .

(b)  $\{u - v, u - w, v - w\}$ .

**Cv. 3.** Necht  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$  a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.

(b) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.

(c) Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.

(d) Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.

(e) Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

**Cv. 4.** Rozhodněte, zda vektory  $(0, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$  jsou lineárně závislé v  $\mathbb{R}^4$  resp. v  $\mathbb{Z}_3^4$ .

**Cv. 5.** Buďte  $U, V$  podprostory prostoru  $W$ . Dokažte, že  $U \cap V = \{0\}$  právě tehdy, když každý vektor  $x \in U + V$  se dá jednoznačně zapsat jako  $x = u + v$ , kde  $u \in U, v \in V$ .

**Cv. 6.** Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ).

(a)  $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .

(b)  $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .

(c)  $\{\sin x, \cos x\}$ .

(d)  $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$ .

(e)  $\{\ln(x), \log_{10}(x), \log_2(x^2)\}$ .