Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (8) Lineární závislost a nezávislost

Definice 1 (Lineární nezávislost) *Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ se nazývají* lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé.

Cv. 1. Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5), (1, -1, 1), (3, 2, -2)$.

(b) $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$.

<u>Řešení</u>:

(a) Hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho tedy dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze $a = b = c = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je $a = -t, b = 2t, c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Tedy například s koeficienty $-1, 2$ a 1 dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u, u+v, u+w\}$.

(b) $\{u-v, u-w, v-w\}$.

Řešení:

(a) Obdobně jako v předchozím příkladě hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, aby
$$0 = au + b(u+v) + c(u+w) = (a+b+c)u + bv + cw.$$
Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $a+b+c=0$, $b=0$ a $c=0$ a tedy i $a=0$. Odtud je $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(b) Obdobně jako v předchozím případě, hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že
$$0 = a(u-v) + b(u-w) + c(v-w) = (a+b)u + (-a+c)v + (-b-c)w.$$
Tedy $a+b=0, -a+c=0$ a $-b-c=0$. Vyřešením dané soustavy dostaneme řešení $a=t, b=-t, c=t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Vektory $\{u-v, u-w, v-w\}$ jsou tedy lineárně závislé, např. s koeficienty $(1,-1,1)^T$.

Cv. 3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Řešení:
Obecně dle definice se nezávislost přenáší “dolů” a závislost “nahoru”. Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1 \ldots, w_k\}$. Dle předpokladu je X závislá, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in K$ takové, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$ a
$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i x_i = 0.$$

Vezměme $\beta_{\ell+1}, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$ a

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i v_i + \sum_{j \in [k]} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 4. Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T, (1,0,1,1)^T, (1,1,0,1)^T, (1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako úlohu 1, jen jednou počítáme nad tělesy $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé a nad $\mathbb{Z}_3$ jsou lineárně závislé. Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa, nad kterým je daný vektorový prostor.

Cv. 5. Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U, v \in V$.

Řešení:
Nejdříve předpokládejme, že $U \cap V = \{0\}$. Mějme 2 vyjádření vektoru x:

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2,$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V.

Pokud tedy $U \cap V = \{0\}$, pak $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z čehož, ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x tedy je jednoznačné.

Na druhou stranu, předpokládejme, že každý vektor $x \in U + V$ umíme vyjádřit jednoznačně. Mějme vektor $z \in U \cap V$. Z jednoznačnosti vyjádření víme, že $z = u + v$. Pokud by nebyl v nulový vektor, pak bychom dostali jiné vyjádření pro $z = u_1$ z toho, že $z \in U$. Obodobně musí i u být nulový vektor. Z toho ale plyne, že $z = 0$ a tedy $U \cap V = \{0\}$.

Cv. 6. Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$.

(c) $\{\sin x, \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x+1), \sin(x+2), \sin(x+3)\}$.

(e) $\{\ln(x), \log_{10}(x), \log_2(x^2)\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x - 1, g(x) = x - 2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pokud tedy dosadíme za f, g a h dostaneme:

$$a \cdot (2x - 1) + b \cdot (x - 2) + c \cdot 3x = (2a + b + 3c) \cdot x + (-a - 2b) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy když:

$$\begin{aligned} 2a + b + 3c &= 0 \\ -a - 2b &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má netriviální řešení například $(-2, 1, 1)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(b) Opět hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot (x^2 + 2x + 3) + b \cdot (x + 1) + c \cdot (x - 1) = a \cdot x^2 + (2a + b + c) \cdot x + (b - c) = 0.$$

Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má jen triviální řešení $(0, 0, 0)$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Snažíme se splnit rovnici $a \sin x + b \cos x = 0$. Pokud dosadíme $x = 0$, pak dostaneme $b = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak dostaneme $a = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2}$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 1$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(d) Ze součtových vzorců pro $\sin x$ máme:

$$\begin{aligned} \sin(x + 1) &= \sin(x) \cdot \cos(1) + \cos(x) \cdot \sin(1) \\ \sin(x + 2) &= \sin(x) \cdot \cos(2) + \cos(x) \cdot \sin(2) \\ \sin(x + 3) &= \sin(x) \cdot \cos(3) + \cos(x) \cdot \sin(3) \end{aligned}$$

Sestavíme tedy rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot \sin(x + 1) + b \cdot \sin(x + 2) + c \cdot \sin(x + 3) \\ &= \big(a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)\big) \cdot \sin(x) \\ &\quad + \big(a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)\big) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Jelikož jsou sin a cos lineárně nezávislé, pak musí platit:

$$\begin{aligned} a\cos(1) + b\cos(2) + c\cos(3) &= 0 \\ a\sin(1) + b\sin(2) + c\sin(3) &= 0 \end{aligned}$$

Což je homogenní soustava o 2 rovnicích a 3 neznámých, musí mít tedy nějaké netriviální řešení. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(e) Platí následující rovnosti: $\log_{10}(2x) = \frac{\ln x + \ln 2}{\ln 10}$ a $\log_2(x^2) = \frac{2\ln x}{\ln 2}$. V rovnici $a \cdot \ln(x) + b \cdot \log_{10}(2x) + c \cdot \log_2(x^2) = 0$ jsou první a poslední člen vzájemnými násobky. Rovnice má tedy netriviální řešení, například $(a, b, c) = (-2, 0, \ln 2)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.