Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (7) Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Definice 1 *Nechť V je množina, $\oplus$ je binární operace na V a $\odot$ je zobrazení $T \times V \to V$, kde T je těleso s operacemi $+$ a $\cdot$. V je vektorový prostor nad T pokud platí následující:*

Asociativita: $\forall u, v, w \in V : u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w.$

Komutativita: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u.$

Neutrální prvky: $\exists 0 \in V : u \oplus 0 = u$ *a* $1 \odot u = u$, *kde* 1 *je neutrální prvek* T *pro* $\cdot$.

Inverzní prvek: $\forall u \in V \ \exists v \in V : u \oplus v = 0.$

Asocitivita pro $\odot$: $\forall a, b \in T, u \in V : (a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u).$

Distributivita: $\forall a, b \in T, u, v \in V : (a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u),$
$a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v).$

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal *vektorů* $v_1, \ldots, v_n$ *je*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \big| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Cv. 1. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Cv. 2. Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro i, buď a_i funkce, která i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\langle a_i, i \in \mathbb{N} \rangle$?

Cv. 3. Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Cv. 4. Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Cv. 5. Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{R}$ popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.