Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (7) Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Definice 1 *Nechť V je množina, $\oplus$ je binární operace na V a $\odot$ je zobrazení $T \times V \to V$, kde T je těleso s operacemi $+$ a $\cdot$. V je vektorový prostor nad T pokud platí následující:*

Asociativita: $\forall u, v, w \in V : u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w.$

Komutativita: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u.$

Neutrální prvky: $\exists 0 \in V : u \oplus 0 = u$ *a* $1 \odot u = u$*, kde* 1 *je neutrální prvek* T *pro* $\cdot$.

Inverzní prvek: $\forall u \in V\ \exists v \in V : u \oplus v = 0.$

Asocitivita pro $\odot$: $\forall a, b \in T, u \in V : (a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u).$

Distributivita: $\forall a, b \in T, u, v \in V : (a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u),$
$$a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v).$$

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal *vektorů* $v_1, \ldots, v_n$ *je*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Big| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Cv. 1. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Řešení:
Pokud S_a má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$ tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x+x')+2(y+y')-3(z+z') = (x+2y-3z)+(x'+2y'-3z) = 0+0 = 0$, a tedy i $(x+x', y+y', z+z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0. Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y, podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

Cv. 2. Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro i, buď a_i funkce, která i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\langle a_i, i \in \mathbb{N} \rangle$?

Řešení:
Ne, protože lineární kombinace je součet jen přes konečný počet sčítanců.

Cv. 3. Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má $\left\langle \begin{pmatrix} 6\\2\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\2\\5\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\6\\3 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 5\\0\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Řešení:
Pro zjištění velikosti průniku 2 prostorů generovanými vektory v_1, v_2, v_3 a u_1, u_2, u_3. Potřebujeme najít takové prvky $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}_7$, že

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + b_3 \cdot u_3.$$

Sestavíme soustavu rovnic se třemi pravými stranami

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Všimněme si, že vektory určující druhý lineární obal jsou sloupce matice nalevo a vektory určující první lineární obal jsou sloupce matice napravo. Chceme totiž vyjádřit vektory určující jeden linérní obal jako lineární kombinace vektorů určující druhý lineární obal. Soustavu převedeme do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Z odstupňovaného tvaru jasně vydíme, že $b_1 = b_3 = 0$. Koeficient b_2 může nabývat libovolné hodnoty ze $\mathbb{Z}_7$, což tedy znamená, že průnik je generovaný vektorem $(3, 2, 2, 5)$ a obsahuje 7 vektorů.

Cv. 4. Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Řešení:
Ano, polynomy stupně nejvýše 10 jsou uzavřené a na sčítání a násobení skalárem. Polynom stupně nejvýše 10 má 11 koeficientů pro mocniny proměnné $x^0, \ldots, x^{10}$. Každý z koeficientů může nabývat 3 hodnot, prostor má tedy 3^{11} prvků.

Cv. 5. Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0\\2\\3\\1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1\\0\\9\\0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 10 & 4 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 10 & 4 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ r \cdot \begin{pmatrix}8\\6\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := \begin{pmatrix}8\\6\\0\\1\end{pmatrix}$ a $w_2 = \begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}$ máme vlastně vyřešit $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = rw_1 + sw_2$, neboli $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 - rw_1 - sw_2 = 0$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 9 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 2 & 9 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 8 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 10 & 4 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 10 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 10 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 10 & 4 & 0\end{pmatrix}\\ &\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 10 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 10 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 10 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, čili nulový vektor.

Cv. 6. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{R}$ popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Například $\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$ a $\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}^T$.

(b) Napříkld pro pořadí proměnných (x, y, z, w):

$$\begin{aligned} y + 2z &= 0 \\ x + z - w &= 0 \end{aligned}$$