

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):**  
**(4) Inverze matic**

**Cv. 1.** Invertujte následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Cv. 2.** Určete inverzní matice k maticím elementárním úprav. Zkuste nejdříve určit inverzní matice úvahou o tom, co dané matice reprezentují. Následně pak ověřte svojí úvahu výpočtem.

(a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením  $i$ . a  $j$ . řádku.

(b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $m$  se objevuje pouze v  $i$ . sloupci a  $i$ . řádku a  $m \neq 0$ .

(c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $m$  se objeví pouze v  $j$ . řádku a  $i$ . sloupci.

**Cv. 3.** Mějme matici

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Spočtete inverzi matice  $R(\alpha)$  a součin matic  $R(\alpha)R(\beta)$ .

Vysvětlete jaký je význam matice  $R(\alpha)$ , její inverze  $R^{-1}(\alpha)$  a součinu  $R(\alpha)R(\beta)$ .  
*Nápověda:*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

**Cv. 4.** Spočtěte inverzi matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Cv. 5.** Bud'  $A$  symetrická regulární matice. Bude  $A^{-1}$  také symetrická?

**Cv. 6.** Necht'  $A^2$  je regulární. Je i  $A$  regulární?