Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (4) Inverze matic

Cv. 1. Invertujte následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Hledáme matici X takovou, že $AX = I$. Z definice maticového násobení si všimneme, že první sloupec matice X je řešením soustavy $Ax = I_{*,1}$, kde $I_{*,1}$ je první sloupec matice I, tedy $(1,0,0,0)^T$. Obdobně pro každý další sloupec matice X. Dostáváme tedy 4 soustavy lineárních rovnic, které se liší pravými stranami.

Vytvoříme si rozšířenou matici soustavy a řešíme pomocí Gauss-Jordanovy eliminace.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Hledaná matice X (neboli matice inverzní k A) je

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Provedeme zkoušku:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Druhá rovnost

$$A^{-1}A = I,$$

platí podle Věty 3.36 (Jedna rovnost stačí) ze skript Milana Hladíka.

Obdobně řešíme pro matice B a C. Matice B je singulární (viz výpočet níže) a tedy nemá inverzi.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Cv. 2. Určete inverzní matice k maticím elementárním úprav. Zkuste nejdříve určit inverzní matice úvahou o tom, co dané matice reprezentují. Následně pak ověřte svojí úvahu výpočtem.

(a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením i. a j. řádku.

(b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objevuje pouze v i. sloupci a i. řádku a $m \neq 0$.

(c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objeví pouze v j. řádku a i. sloupci.

Řešení:

Pokud máme maticové vyjádření nějaké operace (nyní máme matice, které vyjadřují elementární řádkové úpravy), tak inverzní matice (pokud existuje) vyjadřuje "opačnou" operaci. Pokud tedy máme matici A, která upraví matici B na B', pak inverzní matice A^{-1} upraví matici B' na B, formálně: Pokud $B' = AB$, pak $A^{-1}B' = A^{-1}AB = B$.

(a) Matice $E_{i,j}$ reprezentuje úpravu prohození i-tého a j-tého řádku. Abychom tuto operaci vrátili pak musíme opět prohodit řádky i a j. Skutečně výpočtem můžeme ověřit, že $E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}$.

(b) Matice $E_i(m)$ reprezentuje vynásobení i-tého řádku nenulovým koeficientem m. Tuto operaci vrátíme tak, že vydělíme i-tý řádek $\frac{1}{m}$. Výpočtem opět můžeme ověřit, že $E_i^{-1}(m) = E_i(\frac{1}{m})$.

(c) Matice $E_{i,j}(m)$ reprezentuje přičtení m-násobku i-tého řádku k j-tému. Tuto operaci vrátíme, tak že odečteme m-násobek i-tého řádku k j-tému. Výpočtem opět ověříme, že $E_{i,j}^{-1}(m) = E_{i,j}(-m)$.

Cv. 3. Mějme matici

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Spočtěte inverzi matice $R(\alpha)$ a součin matic $R(\alpha)R(\beta)$.

Vysvětlete jaký je význam matice $R(\alpha)$, její inverze $R^{-1}(\alpha)$ a součinu a $R(\alpha)R(\beta)$.
Nápověda:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ 1 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Řešení:
Každá z matic reprezentuje rovinnou transformaci otočení o příslušný úhel kolem počátku (proti směru hodinových ručiček). Tedy matice $R^{-1}(\alpha)$ reprezentuje otočení o úhel α po směru hodinových ručiček.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} & -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & 1 \end{array}\right)$$

Druhou matici jsme dostali tak, že jsme odečetli $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-násobek prvního řádku k druhému. Tuto operaci jsme mohli provést jen pokud $\cos\alpha \neq 0$. Všimněme si, že

$$\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Pokračujme tedy v úpravách a přičtěme $(\cos\alpha\sin\alpha)$-násobek druhého řádku k prvnímu.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & 0 & 1-\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & 1 \end{array}\right)$$

Použijeme, že $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ a vydělíme první řádek $\cos\alpha$ a druhý řádek vynásobíme $\cos\alpha$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 1 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right)$$

Výslednou matici můžeme upravit pomocí $\sin\alpha = -\sin(2\pi-\alpha)$ a $\cos\alpha = \cos(2\pi-\alpha)$ na tvar

$$R^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\alpha) & -\sin(2\pi-\alpha) \\ \sin(2\pi-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{pmatrix} = R(2\pi-\alpha).$$

Inverze tedy opravdu reprezentuje otočení o α po směru hodinových ručiček.

Tuto inverzi jsme spočítali jen pro $\cos\alpha \neq 0$. Nyní se podíváme, jak vypadá matice $R(\alpha)$ pro $\cos\alpha = 0$. V tomto případě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Pro tyto hodnoty α máme $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ a $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$. Tedy,

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Snadno ověříme, že $R(\frac{\pi}{2})R(\frac{3\pi}{2}) = I_2$. Tedy tyto matice jsou navzájem inverzní a platí, že $R^{-1}(\alpha) = R(2\pi - \alpha)$ i pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Dle úvahy součin $R(\alpha)R(\beta)$ reprezentuje otočení o úhel $\alpha + \beta$ proti směru hodinových ručiček, což ověříme výpočtem.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cv. 4. Spočtěte inverzi matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Řešení:</u>
Inverzi spočítáme standardním způsobem. Jen je třeba dávat pozor, abychom při řádkových úpravách opravdu dělali stejné úpravy v levé i pravé matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cv. 5. Buď A symetrická regulární matice. Bude A^{-1} také symetrická?

<u>Řešení:</u>
Ano bude. Spočtěme

$$A(A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n.$$

Tedy $(A^{-1})^T$ je inverzní matice k A. Z jednoznačnosti inverze pak odvodíme, že $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

Cv. 6. Nechť A^2 je regulární. Je i A regulární?

<u>Řešení:</u>
Ano je. Z regularity A^2 víme, že existuje B taková, že $A^2B = I_n$. Pak ale matice AB je inverzní matice k A neboť $A(AB) = (AA)B = A^2B = I_n$.