

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(3) Operace s maticemi

Definice 1 Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ pak jejich součin $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ je definován

$$[AB]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n A_{i,\ell} B_{\ell,j}.$$

Cv. 1. Řešte soustavu:

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Řešte soustavu (Gaussovou eliminací) přesně a s přesností na 3 číslice a s přesností na 3 číslice a částečnou pivotací.

Cv. 2. Pro reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte součin AB a CD .

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Cv. 4. Dokažte nebo vyvráťte:

- (a) Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $A + A = 2A$.
- (b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $A = A^T$.

Cv. 5. Dokažte, anebo vyvráťte, zdali pro matice A, B, C stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

- (a) $A(B + C) = AB + AC$.
- (b) $A^T A$ je symetrická.
- (c) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$.

Cv. 6. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Cv. 7. Dokažte nebo vyvráťte:

- (a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B , pak A komutuje s B^T .
- (b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B , pak A komutuje s B^T .