Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (3) Operace s maticemi

Definice 1 *Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ pak jejich* součin $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *je definován*

$$[AB]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,j}.$$

Cv. 1. Řešte soustavu:

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Řeště soustavu (Gaussovou eliminací) přesně a s přesností na 3 číslice a s přesností na 3 číslice a částečnou pivotací.

Řešení:

(a) Přesně: $x = \frac{10.000}{10.001}, y = \frac{10.002}{10.001}$

(b) Se zaokrouhlováním:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 10^4 & 10^4 \end{array}\right)$$

Protože $10.001 = 1.0001 \cdot 10^4 \sim 1 \cdot 10^4$ a stejně tak $10.002 = 1,0002 \cdot 10^4 \sim 1 \cdot 10^4$. Nová soustava má však řešení $y = 1$ a $x = 0$, tedy "hodně rozdílné" od skutečného řešení.

(c) Se zaokrouhlavním a částečnou pivotací. Pivotace znamená, že k pivotaci sloupečku použijeme řádek, kde je v daném sloupečku koeficient s nejvyšší absolutní hodnotou.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -10^{-4} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zde dostaneme řešení, $x = y = 1$, což je celkem blízko skutečnému řešení. Ani částečná pivotace nám však nemusí vždy pomoci.

Cv. 2. Pro reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte součin AB a CD.

Řešení:

Počítejme dle definice. První složka $[AB]_{1,1}$ (první řádek, první sloupec) matice AB je určena prvním řádkem matice A: $A_{1,*} = (1\ 0\ 1\ 1)$ a prvním sloupcem matice B:

$$B_{*,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Postupně vynásobíme první složku $A_{1,*}$ s první složkou $B_{*,1}$, druhou složku $A_{1,*}$ s druhou složkou $B_{*,1}$ atd. Nakonec všechny součiny sečteme a dostaneme $[AB]_{1,1}$, tedy:

$$[AB]_{1,1} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4.$$

Tento postup opakujeme pro všechny složky matice AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} CD = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, i zaměníme 1 za $\alpha \neq 0$. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in [m]$ a sloupec $k \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned} [AD]_{j,k} &= \sum_{\ell \in [m]} A_{j,\ell} D_{\ell,k} \\ &= A_{j,j} D_{j,k} && (A_{j,\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} D_{j,k} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{j,k} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{j,j}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí D a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

Druhý způsob odůvodnění je, že pokud maticí A násobíme zleva pak i-tý řádek matice AD dostaneme:

$$[AD]_{k,*} = \sum_{\ell \in [m]} A_{k,\ell} D_{\ell,*} = A_{k,k} D_{\ell,*}.$$

Tedy $[AD]_{j,*} = D_{j,*}$ pro $j \neq i$ a $[AD]_{j,*} = \alpha \cdot D_{j,*}$, protože

$$A_{k,k'} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } k = k' \neq i. \\ \alpha & \text{pokud } k = k' = i. \\ 0 & \text{pokud } k \neq k'. \end{cases}$$

(b) Prohození i-tého a j-tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy vezmeme matici identity a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Opět použijeme vztah

$$[BD]_{k,*} = \sum_{\ell \in [m]} B_{k,\ell} D_{\ell,*}.$$

Tedy pro $k \neq i, j$ máme $[BD]_{k,*} = D_{k,*}$, protože $B_{k,k} = 1$ a $B_{k,k'} = 0$ pro $k \neq k'$. Dále máme $[BD]_{i,*} = D_{j,*}$, protože $B_{i,j} = 1$ a $B_{i,i'} = 0$ pro $i' \neq i$. A obdobně máme $[BD]_{j,*} = D_{i,*}$.

(c) Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, j zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Opět vyjdeme ze vztahu

$$[CD]_{i,*} = \sum_{\ell \in [m]} C_{i,\ell} D_{\ell,*}.$$

Opět máme $[CD]_{k,*} = D_{k,*}$ pro $k \neq i$. Pro $[CD]_{i,*} = D_{i,*} + \alpha \cdot D_{j,*}$, protože $C_{i,i} = 1, C_{i,j} = \alpha$ a jinak je řádek $C_{i,*}$ nulový.

Cv. 4. Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $A + A = 2A$.

(b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$: $A = A^T$.

Řešení:

(a) Nejprve ověříme, že obě strany mají smysl.

Pro levou stranu potřebujeme ověřit, že sčítání dává smysl. Tedy potřebujeme, aby obě matice v součtu byly stejného řádu. To je pravda ať zvolíme A libovolně, tedy levá strana má smysl vždy.

Pozor na opomíjení tohoto kroku. Může se stát, že tvrzení platí ale pouze pokud obě strany dávají smysl. Uvažte například následující tvrzení: Pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{o\times p}$: $A + B - B = A$

Na pravé straně násobíme matici A konstantou 2. Tuto operaci můžeme provést s libovolnou maticí A, tedy pravá strana má také vždy smysl.

Poté zkontrolujeme rozměry matice na levé a pravé straně. Na levé straně sčítáme 2 matice řádu $m \times n$ a výsledkem je, dle definice sčítání matic, matice řádu $m\times n$. Na pravé straně násobíme matici řádu $m\times n$ konstantou a výsledkem je, dle Definice 3.3 (Násobek) , matice řádu $m \times n$. Obě strany mají tedy shodné rozměry. *Všimněte si, že při dokazování se odkazujeme na definice z přednášky. Podobně bychom se mohli odkazovat i na věty, lemmata, atp.*

Pozor, pokud tento krok opomenete, může se stát, že matice na levé straně má n řádků a m sloupců, kdežto na pravé straně je jich více. Po složkách můžete ukázat, že levou horní podmatici velikosti $n \times m$ mají obě strany shodnou, ale to nedokazuje rovnost obou stran (která neplatí)!

Nakonec můžeme ukázat rovnost po složkách. Pro libovolný řádek i a sloupec j se podíváme na i, j-tou složku levé strany a ukážeme, že je rovna i, j-té složce pravé strany:

$$\begin{aligned}
[A + A]_{i,j} &= A_{i,j} + A_{i,j} && \text{(rozepíšeme dle definice sčítání)}\\
&= 2A_{i,j} && \text{(nyní pracujeme s čísly z } \mathbb{R}\text{, tedy můžeme sečíst)}\\
&= [2A]_{i,j} && \text{(použijeme definici násobení matice konstantou)}
\end{aligned}$$

(b) Pokud tvrzení neplatí uvádíme protipříklad. Tedy zvolíme matici A, která splňuje předpoklady ale neplatí pro ni závěr.

V tomto případě můžeme třeba za A zvolit následující matici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jediný předpoklad je, že A je čtvercová a ten je pro náš příklad zjevně splněn. Zároveň $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Pokud splnění některého z předpokladů (resp. nesplnění závěru) není triviální, mělo by být součástí řešení zdůvodnění proč předpoklady platí (resp. závěr neplatí).

Případně můžeme dodat za jakých předpokladů by tvrzení platilo. V tomto případě bychom potřebovali A symetrickou.

Cv. 5. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A(B + C) = AB + AC$.

(b) $A^T A$ je symetrická.

(c) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení platí (jedná se o distributivitu násobení a sčítání). Aby obě strany dávaly smysl musí A, B, C splňovat:

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

(jinak nedává ani jedna strana smysl). Díky předpokladu, že A, B, C jsou stejného řádu, tedy musí být všechny matice čtvercové. Po složkách nyní můžeme ukázat rovnost obou matic.

$$\big[A(B + C)\big]_{i,j} = \sum_{\ell\in[n]} A_{i,\ell}[B + C]_{\ell,j} = \sum_{\ell\in[n]} A_{i,\ell}B_{\ell,j} + A_{i,\ell}C_{\ell,j}$$

$$[AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} = \sum_{\ell\in[n]} A_{i,\ell}B_{\ell,j} + \sum_{\ell\in[n]} A_{i,\ell}C_{\ell,j}$$

Vidíme tedy, že po složkách jsou obě strany maticové rovnice stejné.

(b) Tvrzení platí. Ověříme dle definice, že $[A^T A]_{i,j} = [A^T A]_{j,i}$.

$$[A^T A]_{i,j} = \sum_{\ell\in[n]} A^T_{i,\ell}A_{\ell,j} = \sum_{\ell\in[n]} A_{\ell,i}A_{\ell,j}$$

$$[A^T A]_{j,i} = \sum_{\ell\in[n]} A^T_{j,\ell}A_{\ell,i} = \sum_{\ell\in[n]} A_{\ell,j}A_{\ell,i}$$

(c) Tvrzení neplatí. Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B, která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)(A + B).$$

Cv. 6. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:

Nejprve příklad pro první část. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nyní zobecněme pro libovolnou nesymetrickou A. Jelikož je A nesymetrická, tak určitě existují i, j takové, že $A_{i,j} \neq A_{j,i}$ (pro matici z příkladu byly takové i a j indexy 1 a 2). Mějme matici B takovou, že $B_{i,i} = 1$ a 0 všude jinde. Tedy $(BA)_{i,j} = A_{i,j}$ a $(BA)_{j,i} = 0$. A $(AB)_{j,i} = A_{j,i}$ a $(AB)_{i,j} = 0$. Z předpokladu o $A_{i,j}$ a $A_{j,i}$ víme, že nemůže najednou nastat $A_{i,j} = 0$ a $A_{j,i} = 0$. Tedy matice AB a BA jsou rozdílné.

Tvrzení nemusí platit ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} &\neq \\ \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} &= BA. \end{aligned}$$

Cv. 7. Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

Řešení:

(a) Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.

(b) Tvrzení neplatí, například

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$