Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (1) Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1. Určete rovnici přímky π procházející body $(1, 2)$ a $(3, 4)$ v parametrickém tvaru $(x, y) = (x_0, y_0) + t(p, q)$, v obecném tvaru $ax + by + c = 0$, ve úsekovém tvaru $\frac{x}{g} + \frac{y}{h} = 1$ a ve směrnicovém tvaru $y = kx + l$.

Jsou koeficienty jednoznačné? Můžeme libovolnou přímku vyjádřit všemi tvary?

Řešení:

Parametrický tvar udává bod, který leží na přímce a jakým směrem jde přímka. Parametrický tvar odvodíme z rovnice $(3, 4) = (1, 2) + (p, q)$ čili $(x, y) = (1, 2) + t(2, 2)$. Tvar lze zjednodušit vytknutím nejmenšího společného násobku p a q z vektoru (p, q) a odečtením $\frac{x_0}{p}(p, q)$ od (x_0, y_0). Tím dostaneme parametrický tvar $(x, y) = (0, 1) + t(1, 1)$.

Pro získání obecného tvaru rozepíšeme parametrický tvar do dvou rovnic a parametr z jedné dosadíme do druhé. Obecný tvar dává dosazení $t = x$ do $y = 1 + t$ neboli $x - y + 1 = 0$. Obecně lze první vynásobit q, druhou $-p$ a obě sečíst, pak dostaneme $a = q,\ b = -p,\ c = py_0 - qx_0$.

Úsekový tvar odvodíme z obecného vydělením $-c$. Úsekový tvar dává koeficienty $g = -1$, $h = 1$, čili $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = -x + y = 1$. Koeficienty g a h určují v jakých bodech přímka protíná osy x a y.

Směrnicový tvar odvodíme z obecného vyjádřením y (je-li $b \neq 0$). Směrnicový tvar je $y = x + 1$. Koeficient l udává bod ve kterém protíná přímka osu y a koeficient k udává směrnici přímky (tangent úhlu, který svírá přímka a osa x).

K jednoznačnosti: Za bod (x_0, y_0) lze vzít kterýkoli bod na přímce π, za koeficienty (p, q) lze vzít kterýkoli jejich násobek.

U směrnicového a úsekového tvaru jsou koeficieny jednoznačné, u obecného tvaru lze vzít libovolný násobek, kupříkladu $-2x + 2y - 2 = 0$.

Úsekový tvar nemají přímky procházející počátkem (koeficient c je u nich nulový). Směrnicový tvar nemají přímky kolmé na osu x (koeficient b je u nich nulový).

Cv. 2. Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutuje předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Řešení:

Možností je celá řada:

- *Bod a směrnice přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrnice je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

Cv. 3. Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

Řešení:
Možné polohy přímek:

- *Rovnoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Totožné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Různoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Mimoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

Cv. 4. Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Řešení:
Uvažme normálu v obecném tvaru (a, b, c) a rovnici tak ve tvaru $ax_1+bx_2+cx_3 = d$. Protože rovina obsahuje bod $[3, 2, 1]$, dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrnice $(1, 1, 1), (2, -1, 0)$, které musí být kolmé na normálu, dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – mohu uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení $a = t$, $b = 2t$, $c = -3t$, $d = 4t$, kde

$t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolíme například $t = 1$ (nebo jakékoli jiné nenulové t) a máme jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrnic!

Cv. 5. Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Řešení:

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme $x_2 = x_3 = 0$ a z rovnice dostaneme $x_1 = 2$. Tudíž máme bod $[2, 0, 0]$.

Směrnice získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu $(2, 3, 1)$. Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například $(0, 1, -3)$ a $(1, 0, -2)$. Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor (a, b, c) musí být kolmý na normálu, tj. $2a + 3b + c = 0$. Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme $a = 0, b = 1$ a dopočítáme $c = -3$, a jako druhé řešení dosadíme $a = 1, b = 0$ a dopočítáme $c = -2$. Opět musíme být trochu opatrní, aby směrnice neudávali stejný směr.

Cv. 6. Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Řešení:

V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru t .

Například eliminací proměnné x_1 dostaneme rovnici $x_2 + x_3 = 1$. Zvolíme $t = x_3$ jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice $x_2 + x_3 = 1$ odvodíme $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$. Z původní rovnice $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ vyjádříme $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$.

Výsledek: $[x_1, x_2, x_3] = [-1+2t, 1-t, t] = [-1, 1, 0] + t(2, -1, 1)$. To jest, přímka prochází bodem $[-1, 1, 0]$ a má směrnici $(2, -1, 1)$.

Cv. 7. Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Řešení:

Každá rovnice musí vyhovovat bodu $[3, 2, 1]$ a její normála musí být kolmá na směrnici $(1, -1, 1)$. Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například $(1, 1, 0)$, ta je kolmá na směrnici. Normále odpovídá rovnice $x_1 + x_2 = d$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d = 5$. Nyní zvolme jinou normálu, například $(0, 1, 1)$, která je též kolmá na směrnici. Ta odpovídá rovnici $x_2 + x_3 = d'$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d' = 3$. Tudíž výsledkem jsou rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$.

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu $(1, 0, -1)$, která vede na rovnici $x_1 - x_3 = 2$. Tudíž rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 - x_3 = 2$ dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím $x_1+x_2 = 5$, $x_2+x_3 = 3$ přidali ještě rovnici $x_1-x_3 = 2$, tak soustava $x_1+x_2 = 5$, $x_2+x_3 = 3$, $x_1 - x_3 = 2$ sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

Cv. 8. Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 5, 3],\ (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1],\ (-1, 2, 2).$$

Řešení:
Protože jsou směrnice až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod $[1, 5, 3]$ přímky p leží na přímce q, neboť $[1, 5, 3] = [3, 1, -1] + t(-1, 2, 2)$ pro $t = 2$. Tudíž jsou přímky totožné.

Cv. 9. Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 7]$.

Řešení:
Kvadratická funkce má tvar $y = ax^2 + bx + c$. Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1,\ 4a + 2b + c = 2,\ 9a + 3b + c = 7,$$

z čehož vypočítáme $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$. Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$