Úlohy ke cvičení – 7.1.2020

Definice 1 (Afinní podprostor)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak afinní podprostor je jakákoli množina $M \subseteq V$ tvaru*

$$M = U + a = \{v + a : v \in U\},$$

kde $a \in V$ a U je vektorový podprostor V.

Definice 2. *Dva afinní podprostory $U + a$ a $W + b$ jsou* rovnoběžné *pokud $U \subseteq W$.*

Věta 3. *Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor, tj. je tvaru $M = U + a$ právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$.*

Úloha 1: Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici $[D_x]_{AK}$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \dots, x^4)$.)

Úloha 2: Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = \big\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big\}$ a $B' = \big\{(1,1),(2,0)\big\}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete obraz vektoru (x, y, z).

Úloha 3: Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \to A - A^T$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

1. I_2.
2. 0.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 4: Ukažte, že množina řešení soustavy $Ax = b$ je afinní prostor a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Úloha 5: Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení a $U + a$ afinní podprostor U. Ukažte, že jeho obraz je afinní podprostor V a najděte jeho popis.

Úloha 6: Ukažte, že $U + a = V + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$ a $U = V$.

Úloha 7: Ukažte, že rovnoběžné afinní prostory $U + a$ a $W + b$ jsou disjunktní právě tehdy, když $a - b \notin U \cup W$.