# Úlohy ke cvičení – 10.12.2019

**Definice 1** (Lineární zobrazení)**.** *Mějme vektorové prostory $U$ a $V$ nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je* lineární *pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

**Definice 2** (Matice lineárního zobrazení)**.** *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi $U$ nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi $V$ nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Potom matice ${}_{B_2}[f]_{B_1} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky $a_{ij}$ se nazývá* matice lineárního zobrazení $f$ vzhledem k bázím $B_1, B_2$.

**Definice 3** (Matice přechodu)**.** *Mějme vektorový prostor $U$ a jeho báze $B_1$ a $B_2$.* Matice přechodu od $B_1$ k $B_2$ *je matice ${}_{B_2}[id]_{B_1}$.*

---

*Úloha 1:* Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U = \mathrm{Span}\big((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\big)$.

b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

*Úloha 2:* Rozhodněte, zdali prostory $U$ a $V$ z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

*Úloha 3:* Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi $K$.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

b) otočení o úhel $\alpha$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

c) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

*Úloha 4:* Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi $K$ (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení $f$ je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

*Úloha 5:* Ukažte, že platí ${}_B[id]_A = \left({}_K[id]_B\right)^{-1} {}_K[id]_A$.

*Úloha 6:* Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = \big((1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T\big)$,
$B = \big((1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T\big)$.
Nalezněte matice přechodu:

a) ${}_K[id]_A$, tj. od báze $A$ ke kanonické bázi.

b) ${}_B[id]_K$, tj. od kanonické báze k bázi $B$.

c) ${}_B[id]_A$, tj. od báze $A$ k bázi $B$.