

## Úlohy ke cvičení – 3.12.2019

**Definice 1** (Lineární zobrazení). Mějme vektorové prostory  $U$  a  $V$  nad tělesem  $\mathbb{T}$ . Zobrazení  $f : U \rightarrow V$  je lineární pokud pro každé  $x, y \in U$  a  $a \in \mathbb{T}$  platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .
- $f(ax) = af(x)$ .

**Definice 2** (Matice lineárního zobrazení). Mějme lineární zobrazení  $f : U \rightarrow V$ ,  $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  bázi  $U$  nad  $\mathbb{T}$  a  $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$  bázi  $V$  nad  $\mathbb{T}$ . Nechť  $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ . Potom matice  ${}_{B_2}[f]_{B_1} \in \mathbb{T}^{m \times n}$  s prvky  $a_{ij}$  se nazývá matice lineárního zobrazení  $f$  vzhledem k bázím  $B_1, B_2$ .

---

*Úloha 1:* Doplňte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ .

b)  $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$ , v prostoru  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.

*Úloha 2:* Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .

*Úloha 3:* Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_5^7$ .

a)  $U = \text{Span}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$ .

b)  $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$ .

*Úloha 4:* Rozhodněte, zdali prostory  $U$  a  $V$  z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

*Úloha 5:* Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ( $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) vůči kanonické bázi  $K$ .

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

b) otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

c) projekce na první souřadnici  $p_1 : (x, y) \rightarrow (x, 0)$ .

*Úloha 6:* Nalezněte matici zobrazení  $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$  vůči kanonické bázi  $K$  (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení  $f$  je známo, že převádí vektory  $u_1 = (2, 4, 1)^T$ ,  $u_2 = (2, 3, 4)^T$  a  $u_3 = (3, 0, 1)^T$  na vektory  $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$ ,  $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$  a  $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$ .