Úlohy ke cvičení – 26.11.2019

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a mějme vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost)**.** *Vektory* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *se nazývají* lineárně nezávislé, *pokud rovnost* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ *nastane pouze pro* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé.

Definice 2 (Lineární obal)**.** Lineární obal *vektorů* $v_1, \ldots, v_n$ *je*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Big| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Definice 3 (Báze)**.** *Vektory* $v_1, \ldots, v_n$ *tvoří* bázi V *pokud jsou lineárně nezávislé a*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = V.$$

Úloha 1: Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

d) Je-li X závislá, je Y závislá.

e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Úloha 2: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u+v, u+w\}$.

b) $\{u-v, u-w, v-w\}$.

Úloha 3: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

b) $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Úloha 4: Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Úloha 5: Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U = \mathrm{Span}\big((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big).$

b) $V = \big\{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}.$

Úloha 6: Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.