Úlohy ke cvičení – 19.11.2019

Definice 1. *Nechť V je množina, $\oplus$ je binární operace na V a $\odot$ je zobrazení $T \times V \to V$, kde T je těleso s operacemi $+$ a $\cdot$. V je vektorový prostor nad T pokud platí následující:*

Asociativita: $\forall u, v, w \in V : u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w.$

Komutativita: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u.$

Neutrální prvky: $\exists 0 \in V : u \oplus 0 = u$ *a* $1 \odot u = u$, *kde* 1 *je neutrální prvek* T *pro* $\cdot$.

Inverzní prvek: $\forall u \in V\ \exists v \in V : u \oplus v = 0.$

Asocitivita pro $\odot$: $\forall a, b \in T, u \in V : (a \cdot b) \odot u = a \cdot (b \odot u).$

Distributivita: $\forall a, b \in T, u, v \in V : (a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u),$

$$a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v).$$

Úloha 1: Určete, zda následující množiny jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^k$.
- $\mathbb{C}$.
- Množina všech polynomů s reálným koeficienty.
- Množina všech posloupností $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Množina všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Úloha 2: Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad\qquad a \odot u = u^a$$

Je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$?

Úloha 3: V systému podmnožin množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$ braném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b, d, e\}$,

- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a, c, d\}$, $\mathbf{w} = \{b, c\}$, $\mathbf{x} = \{a, b, d, e\}$ a $\mathbf{y} = \{b, e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a, b, e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Úloha 4: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Úloha 5: Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

d) Je-li X závislá, je Y závislá.

e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Úloha 6: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u + v, u + w\}$.

b) $\{u - v, u - w, v - w\}$.