Úlohy ke cvičení – 5.11.2019

Definice 1. *Množina $\mathbb{G}$ s operací $+$ se nazývá grupou pokud:*

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = 0 + a = a$.

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = b + a = 0$.

Definice 2. *Množina $\mathbb{T}$ s operacemi $+$ a $\cdot$ se nazývá těleso pokud platí:*

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot b)$.

Komutativita: $\forall a, b \in \mathbb{T} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$.

Neutrální prvky: $\exists 0, 1 \in T : 0 \neq 1, a + 0 = a, a \cdot 1 = a$ *pro všechna* $a \in \mathbb{T}$.

Inverzní prvek pro $+$: $\forall a \in \mathbb{T}\ \exists b : a + b = 0$. *Inverzní prvek b značíme $-a$.*

Inverzní prvek pro $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{T}, a \neq 0\ \exists b \in T : a \cdot b = 1$. *Inverzní prvek b značíme $\frac{1}{a}$.*

Distributivita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Úloha 1: Rozložte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

na součin $\mathbf{LU}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice (t.j. všechny elementy nad resp. pod diagonálou jsou nuly). A následně vyřeště soustavu:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

Nápověda: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Úloha 3: Ukažte, že i následující redukované axiomy definují grupu:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c.$

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = a.$

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = 0.$

Úloha 4: Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Úloha 5: Pro $n \in \mathbb{N}$ a asociativní operaci $\cdot$ označme $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, kde na pravé straně rovnosti se prvek a vyskytuje n-krát. Určete hodnoty 2^{101} a 3^{555} v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 6: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$