# Úlohy ke cvičení – 22.10.2019

**Definice 1.** *Množina $\mathbb{G}$ s operací $+$ se nazývá grupou pokud:*

**Asociativita:** $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

**Neutrální prvek:** $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = 0 + a = a$.

**Inverzní prvek:** $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = b + a = 0$.

---

*Úloha 1:* Určete inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením $i$. a $j$. řádku.

b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $m$ se objevuje pouze v $i$. sloupci a $i$. řádku a $m \neq 0$

c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $m$ se objeví pouze v $j$. řádku a $i$. sloupci.

*Úloha 2:* Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ zkonstruujte symetrickou matici $\mathbf{B}$ tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

*Úloha 3:* Rozložte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

na součin $\mathbf{LU}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice (t.j. všechny elementy nad resp. pod diagonálou jsou nuly). A následně vyřeště soustavu:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

*Úloha 4:* Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

*Nápověda:* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

*Úloha 5:* Ukažte, že i následující redukované axiomy definují grupu:

**Asociativita:** $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

**Neutrální prvek:** $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = a$.

**Inverzní prvek:** $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = 0$.

*Úloha 6:* Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.