

Úlohy ke cvičení – 15.10.2019

Definice 1. Elementární ekvivalentní úpravy jsou následující úpravy soustavy rovnic:

1. Vynásobení i -tého řádku číslem $t \neq 0$.
2. Přičtení j -tého řádku k i -tému.
3. Záměna pořadí řádků.
4. Přičtení t -násobku j -tého řádku k i -tému.

Definice 2. Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ pak jejich součin $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ je definován

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell} B_{\ell j}.$$

Úloha 1: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$

Úloha 2: Ukažte, že elementární úpravy:

- záměna dvou rovnic a
 - přičtení t násobku j -té rovnice k i -té
- se dají provést pomocí elementárních úprav:
- vynásobení i -té rovnice nenulovým číslem t
 - přičtení j -té rovnice k i -té

Úloha 3: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte součin **AB**.

b) Spočítejte součin **CD**.

Úloha 4: Zapište elementární úpravy jako součin matic.

Úloha 5: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$