Úlohy ke cvičení – 15.10.2019

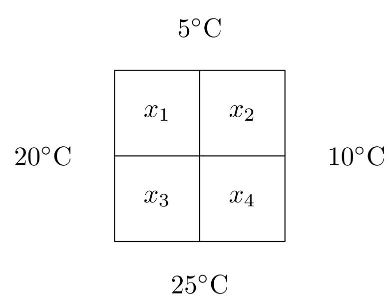
Definice 1. Elementární ekvivalentní úpravy *jsou následující úpravy soustavy rovnic:*

1. *Vynásobení i-tého řádku číslem* $t \neq 0$.
2. *Přičtení j-tého řádku k i-tému.*
3. *Záměna pořadí řádků.*
4. *Přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému.*

Definice 2. *Mějme matice* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *a* $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *pak jejich* součin $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *je definován*

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} B_{\ell j}.$$

Úloha 1: Uvažujme neobývaný dům se čtyřmi místnostmi dle obrázku:



Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 25°C, z východu 10°C, ze západu 20°C a ze severu 5°C. Určete teplotu $x_1, \ldots, x_4$ v jednotlivých místnostech pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolních oblastí.

Úloha 2: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Úloha 3: Ukažte, že elementární úpravy:
– záměna dvou rovnic a
– přičtení t násobku j-té rovnice k i-té

se dají provést pomocí elementárních úprav:
– vynásobení i-té rovnice nenulovým číslem t
– přičtení j-té rovnice k i-té

Úloha 4: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte součin **AB**.

b) Spočítejte součin **CD**.

Úloha 5: Zapište elementární úpravy jako součin matic.

Úloha 6: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$