Úlohy ke cvičení – 10.1.2019

Definice 1 (Lineární zobrazení)**.** *Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak afinní podprostor je jakákoli množina $M \subseteq V$ tvaru*

$$M = U + a = \{v + a : v \in U\},$$

kde $a \in V$ a U je vektorový podprostor V.

Věta 2. *Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor, tj. je tvaru $M = U + a$ právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$.*

Úloha 1: Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = \big\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big\}$ a $B' = \big\{(1,1),(2,0)\big\}$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete obraz vektoru (x, y, z).

Úloha 2: Ukažte, že množina řešení soustavy $Ax = b$ je afinní prostor a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Zkouška Lineární algebra I, VZOR

1	2	3	4	Σ

Jméno:

---

1. Definujte vektorový prostor. **1**
Zformulujte a dokažte Steinitzovu větu o výměně. **7**

---

2. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{P}^2$ a $g : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ zadané následovně

$$
\begin{aligned}
f((1,0,0)) &= 2x^2 + x + 2, & g(2x^2 + x) &= (2,-1,8),\\
f((0,1,0)) &= -2x + 1, & g(x^2 + x) &= (3,2,5),\\
f((0,0,1)) &= 3x^2 + 3, & g(-x^2 - x + 1) &= (-1,3,-9).
\end{aligned}
$$

Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. **4**
Je toto zobrazení prosté a je na? **2**

---

3. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi průniku jejich řádkových prostorů a rozhodněte, zda lze elementárními řádkovými úpravami převést matici A na B. **6**

---

4. Rozhodněte a zdůvodněte, které z následujících tvrzení jsou pravdivé:

(a) V každém tělese platí: $0 \neq -1$. **2**

(b) Buďte U, V, W podprostory nějakého vektorového prostoru.
Pak $(U + V) \cap (U + W) \subseteq U + (V \cap W)$. **2**

(c) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ jsou vektory 3 a $\sqrt{3}$ lineárně nezávislé. **2**

(d) Mezi prostory $\mathcal{P}^{15}$ (reálné polynomy stupně nejvýše 15) a $\mathbb{R}^{16}$ nad $\mathbb{R}$ existuje právě jeden isomorfismus. **2**