

Úlohy ke cvičení – 3.1.2019

Definice 1 (Lineární zobrazení). *Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem \mathbb{T} . Zobrazení $f : U \rightarrow V$ je lineární pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení). *Mějme lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi U nad \mathbb{T} a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi V nad \mathbb{T} . Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$. Potom matice $[f]_{B_1B_2} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2 .*

Definice 3 (Matice přechodu). *Mějme vektorový prostor U a jeho báze B_1 a B_2 . Matice přechodu od B_1 k B_2 je matice $[id]_{B_1B_2}$.*

Věta 4 (Matice složeného lineárního zobrazení). *Mějme lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$. Nechť B_1 je báze U , B_2 báze V a B_3 báze W . Pak*

$$[f \circ g]_{B_1B_3} = [g]_{B_2B_3} \cdot [f]_{B_1B_2}.$$

Úloha 1: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Úloha 2: Nechť prostor polynomů nad \mathbb{R} stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1)$. Určete matici $[D_x]_{AK}$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \dots, x^4)$.)

Úloha 3: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1}[id]_{AK}$.

Úloha 4: Mějme v prostoru \mathbb{Z}_5^4 dané báze
 $A = ((1, 2, 0, 1)^T, (4, 1, 3, 1)^T, (3, 1, 3, 4)^T, (2, 0, 2, 2)^T)$,
 $B = ((1, 2, 3, 1)^T, (4, 4, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (3, 1, 4, 0)^T)$.
Nalezněte matice přechodu:

- $[id]_{AK}$, tj. od báze A ke kanonické bázi.
- $[id]_{KB}$, tj. od kanonické báze k bázi B .
- $[id]_{AB}$, tj. od báze A k bázi B .

Úloha 5: Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ užitím matic zobrazení.