Úlohy ke cvičení – 13.12.2018

Definice 1 (Lineární zobrazení)**.** *Mějme vektorové prostory U a V nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je* lineární *pokud pro každé $x, y \in U$ a $a \in \mathbb{T}$ platí:*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(ax) = af(x)$.

Definice 2 (Matice lineárního zobrazení)**.** *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bázi U nad $\mathbb{T}$ a $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bázi V nad $\mathbb{T}$. Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Potom matice $[f]_{B_1 B_2} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá* matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2.

Definice 3 (Matice přechodu)**.** *Mějme vektorový prostor U a jeho báze B_1 a B_2.* Matice přechodu od B_1 k B_2 *je matice $[id]_{B_1 B_2}$.*

Věta 4 (Matice složeného lineárního zobrazení)**.** *Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$ a $g : V \to W$. Nechť B_1 je báze U, B_2 báze V a B_3 báze W. Pak*

$$[f \circ g]B_1 B_3 = [g]_{B_2 B_3} \cdot [f]_{B_1 B_2}.$$

Úloha 1: Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U = \mathcal{L}\big((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big)$.

b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

Úloha 2: Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Úloha 3: Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

b) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

c) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Úloha 4: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1} [id]_{AK}$.

Úloha 5: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2,4,1)^T$, $u_2 = (2,3,4)^T$ a $u_3 = (3,0,1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2,1,2)^T$, $f(u_2) = (0,4,1)^T$ a $f(u_3) = (4,4,1)^T$.

Úloha 6: Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici $[D_x]_{AK}$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte $K = (x^0, \dots, x^4)$.)