Úlohy ke cvičení – 29.11.2018

Definice 1. *Nechť V je množina, $\oplus$ je binární operace na V a $\odot$ je zobrazení $T \times V \to V$, kde T je těleso s operacemi $+$ a $\cdot$. V je vektorový prostor nad T pokud platí následující:*

Asociativita: $\forall u, v, w \in V : u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w.$

Komutativita: $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u.$

Neutrální prvky: $\exists 0 \in V : u \oplus 0 = u$ *a* $1 \odot u = u$*, kde* 1 *je neutrální prvek* T *pro* $\cdot$.

Inverzní prvek: $\forall u \in V\ \exists v \in V : u \oplus v = 0.$

Asocitivita pro $\odot$: $\forall a, b \in T, u \in V : (a \cdot b) \odot u = a \cdot (b \odot u).$

Distributivita: $\forall a, b \in T, u, v \in V : (a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u),$

$$a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v).$$

Věta 2 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Buď V vektorový prostor, buď $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V , a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů V. Pak platí*

1. $m \leq n$,
2. *existují navzájem různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů V.*

Úloha 1: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Úloha 2: Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

d) Je-li X závislá, je Y závislá.

e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Úloha 3: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u + v, u + w\}$.

b) $\{u - v, u - w, v - w\}$.

Úloha 4: Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$)

a) $\{\sin(x), \cos(x)\}$.

b) $\{\ln(x), \log(2x), \log_2(x^2)\}$.
(T.j. jde o přirozený, dekadický a binární logaritmus.)

Úloha 5: Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, potom existují báze X prostoru V a báze Y prostoru W takové, že $X \subseteq Y$.

Úloha 6: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.