

Úlohy ke cvičení – 15.11.2018

Definice 1. Množina \mathbb{T} s operacemi $+$ a \cdot se nazývá těleso pokud platí:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot b)$.

Komutativita: $\forall a, b \in \mathbb{T} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$.

Neutrální prvky: $\exists 0, 1 \in T : 0 \neq 1, a + 0 = a, a \cdot 1 = a$ pro všechna $a \in \mathbb{T}$.

Inverzní prvek pro $+$: $\forall a \in \mathbb{T} \exists b : a + b = 0$. Inverzní prvek b značíme $-a$.

Inverzní prvek pro \cdot : $\forall a \in \mathbb{T}, a \neq 0 \exists b \in T : a \cdot b = 1$. Inverzní prvek b značíme $\frac{1}{a}$.

Distributivita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Úloha 1: Rozhodněte, zda jsou následující číselné obory se sčítáním a násobením tělesa: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Úloha 2: Ukažte, že v každém tělese platí, že $a \cdot b = 0$ právě tehdy pokud $a = 0$ nebo $b = 0$. A rozhodněte, zda \mathbb{Z}_6 je těleso.

Úloha 3: Pro $n \in \mathbb{N}$ a asociativní operaci \cdot označme $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, kde na pravé straně rovnosti se prvek a vyskytuje n -krát. Určete hodnoty 2^{101} a 3^{555} v tělese \mathbb{Z}_5 .

Úloha 4: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

Úloha 5: Invertujte následující matice v tělesech \mathbb{Z}_3 a \mathbb{Z}_5

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$