

Úlohy ke cvičení – 1.11.2018

Definice 1. Množina \mathbb{G} s operací $+$ se nazývá grupou pokud:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c.$

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = 0 + a = a.$

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G} \exists b : a + b = b + a = 0.$

Úloha 1: Ukažte, že i následující redukované axiomy definují grupu:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c.$

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = a.$

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G} \exists b : a + b = 0.$

Úloha 2: Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$

Úloha 3: Nalezněte cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací

$$p = (6, 4, 1, 5, 3, 2), q = (6, 4, 3, 2, 5, 1).$$

Úloha 4: Nechť \mathbb{S}_n je množina všech permutací na $[n]$ a \mathbb{A}_n je množina permutací na $[n]$ s kladným znaménkem. Ukažte, že \mathbb{S}_n a \mathbb{A}_n spolu se skládáním tvoří grupu. Tvoří grupu také permutace se záporným znaménkem?

Úloha 5: Nalezněte nějakou permutaci p na 10 prvcích takovou, že p^i není identita (značíme $p^i \neq \iota$) pro všechna $i = 1, \dots, 29.$

Úloha 6: Kolik existuje permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním cyklem?