

Úlohy ke cvičení – 25.10.2018

Definice 1. Množina \mathbb{G} s operací $+$ se nazývá grupou pokud:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c.$

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = 0 + a = a.$

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G} \exists b : a + b = b + a = 0.$

Úloha 1: Určete inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením $i.$ a $j.$ řádku.

b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objevuje pouze v $i.$ sloupci a $i.$ řádku a $m \neq 0$

c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objeví pouze v $j.$ řádku a $i.$ sloupci.

Úloha 2: Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici \mathbf{A} zkonstruujte symetrickou matici \mathbf{B} tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Úloha 3: Rozložte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

na součin \mathbf{LU} , kde \mathbf{L} je dolní a \mathbf{U} je horní trojúhelníková matice (t.j. všechny elementy nad resp. pod diagonálou jsou nuly). A následně vyřešte soustavu:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

Nápověda: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Úloha 5: Ukažte, že i následující redukované axiomy definují grupu:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = a$.

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G} \exists b : a + b = 0$.

Úloha 6: Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.