

## Úlohy ke cvičení – 12.12.2017

*Úloha 1:* Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostorech  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{Z}_3^4$  a  $\mathbb{Z}_5^4$ . Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

$$X_1 = \{(0, 1, 2, 1)^T, (1, 2, 0, 0)^T, (1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T\}.$$

*Úloha 2:* Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .

*Úloha 3:* Vyzkoušejte, zda řádkový a sloupcový prostor následující matice nad  $\mathbb{R}$  mají stejnou dimenzi. Jak s tím souvisí dimenze kernelu?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

*Úloha 4:* Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_5^7$ .

a)  $U = \mathcal{L}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$ .

b)  $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$ .

*Úloha 5:* Rozhodněte, zdali prostory  $U$  a  $V$  z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

*Úloha 6:* V prostoru reálných spojitých funkcí nad  $\mathbb{R}$  uvažujme podprostor generovaný funkcemi  $\sin^2(x)$ ,  $\sin(2x)$ ,  $\cos^2(x)$ ,  $\cos(2x)$  a  $f(x) = 1$ . Najděte bázi tohoto podprostoru.