

## Úlohy ke cvičení – 5.12.2017

**Věta 1** (Steinitzova věta o výměně). *Bud'  $V$  vektorový prostor, bud'  $x_1, \dots, x_m$  lineárně nezávislý systém ve  $V$ , a necht'  $y_1, \dots, y_n$  je systém generátorů  $V$ . Pak platí*

1.  $m \leq n$ ,
  2. existují navzájem různé indexy  $k_1, \dots, k_{n-m}$  takové, že  $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$  tvoří systém generátorů  $V$ .
- 

*Úloha 1:* Necht'  $V$  je vektorový prostor a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- a) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.
- b) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.
- c) Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.
- d) Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.
- e) Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

*Úloha 2:* Nech  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- a)  $\{u, u + v, u + w\}$ .
- b)  $\{u - v, u - w, v - w\}$ .

*Úloha 3:* Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ )

- a)  $\{\sin(x), \cos(x)\}$ .
- b)  $\{\ln(x), \log(2x), \log_2(x^2)\}$ .  
(T.j. jde o přirozený, dekadický a binární logaritmus.)

*Úloha 4:* Ukažte, že pokud je  $V$  podprostorem prostoru  $W$  konečné dimenze, potom existují báze  $X$  prostoru  $V$  a báze  $Y$  prostoru  $W$  takové, že  $X \subseteq Y$ .

*Úloha 5:* Doplňte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

- a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ .
- b)  $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$ , v prostoru  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.