Úlohy ke cvičení – 21.11.2017

Definice 1. *Množina $\mathbb{G}$ s operací $+$ se nazývá grupou pokud:*

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = 0 + a = a$.

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = b + a = 0$.

Definice 2. *Permutace konečné množiny X je bijekce $p : X \to X$. Znaménko permutace $sgn(p)$ je $(-1)^{N(p)}$, kde $N(p)$ je počet inverzí p.*

Úloha 1: Ukažte, že i následující redukované axiomy definují grupu:

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{G} : a + (b + c) = (a + b) + c$.

Neutrální prvek: $\exists 0 \in \mathbb{G} : a + 0 = a$.

Inverzní prvek: $\forall a \in \mathbb{G}\ \exists b : a + b = 0$.

Úloha 2: Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Úloha 3: Cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací

$$p = (6, 4, 1, 5, 3, 2), q = (6, 4, 3, 2, 5, 1).$$

Úloha 4: Nechť $\mathbb{S}_n$ je množina všech permutací na $[n]$ a $\mathbb{A}_n$ je množina permutací na $[n]$ s kladným znaménkem. Ukažte, že $\mathbb{S}_n$ a $\mathbb{A}_n$ spolu se skládáním tvoří grupu. Tvoří grupu také permutace se záporným znaménkem?

Úloha 5: Nalezněte nějakou permutaci p na 10 prvcích takovou, že p^i není identita (značíme $p^i \neq \imath$) pro všechna $i = 1, \ldots, 29$.

Úloha 6: Kolik existuje permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním cyklem?

Úloha 7: Najděte kritérium pro řešitelnost tzv. Lloydovy patnáctky.