Úlohy ke cvičení – 14.11.2017

Definice 1. *Množina $\mathbb{T}$ s operacemi $+$ a $\cdot$ se nazývá těleso pokud platí:*

Asociativita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot b)$.

Komutativita: $\forall a, b \in \mathbb{T} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$.

Neutrální prvky: $\exists 0, 1 \in T : 0 \neq 1, a + 0 = a, a \cdot 1 = a$ *pro všechna* $a \in \mathbb{T}$.

Inverzní prvek pro +: $\forall a \in \mathbb{T}\ \exists b : a + b = 0$. *Inverzní prvek* b *značíme* $-a$.

Inverzní prvek pro $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{T}, a \neq 0\ \exists b \in T : a \cdot b = 1$. *Inverzní prvek* b *značíme* $\frac{1}{a}$.

Distributivita: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Úloha 1: Rozhodněte, zda jsou následující číselné obory se sčítáním a násobením tělesa: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Úloha 2: Ukažte, že v každém tělese platí, že $a \cdot b = 0$ právě tehdy pokud $a = 0$ nebo $b = 0$. A rozhodněte, zda $\mathbb{Z}_6$ je těleso.

Úloha 3: Z axiomů odvoďte, že pro počítání v tělese $\mathbb{T}$ platí:

a) Pro $a, b \in \mathbb{T}$ má rovnice $a + x = b$ jednoznačné řešení $x \in \mathbb{T}$.

b) Pokud $a + b = a + c$, potom $b = c$.

c) Jednotka a inverzní prvky jsou určeny jednoznačně.

d) Pro všechna $a \in \mathbb{T}$ platí $(-1)a = -a$.

Úloha 4: Pro $n \in \mathbb{N}$ a asociativní operaci $\cdot$ označme $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, kde na pravé straně rovnosti se prvek a vyskytuje n-krát. Určete hodnoty 2^{101} a 3^{555} v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 5: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Úloha 6: Invertujte následující matice v tělesech $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$