Úlohy ke cvičení – 7.11.2017

Úloha 1: Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici $\mathbf{A}$ zkonstruujte symetrickou matici $\mathbf{B}$ tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Úloha 2: Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$

f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$

g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

n) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

o) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

p) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AB}$

q) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

r) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

s) $\mathbf{0A} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$

Úloha 3: Ukažte, že součin dvou horních trojúhelníkových matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ stejného řádu je opět horní trojúhelníková matice.

Úloha 4: Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}, x \in \mathbb{R}^p$ a $y \in \mathbb{R}^m$. Pak platí:

a) $\mathbf{A}e_j = \mathbf{A}_{*j}$

b) $e_i^T\mathbf{A} = \mathbf{A}_{i*}$

c) $(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{AB}_{*j}$

d) $(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}$

e) $\mathbf{A}x = \sum_{j=1}^{p} x_j \mathbf{A}_{*j}$

e) $y^T\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{A}_{i*}$

Úloha 5: Rozložte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

na součin $\mathbf{LU}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice (t.j. všechny elementy nad resp. pod diagonálou jsou nuly). A následně vyřeště soustavu:

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 6: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

Nápověda: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.