

Úlohy ke cvičení – 17.10.2017

Definice 1. Elementární ekvivalentní úpravy jsou následující úpravy soustavy rovnic:

1. Vynásobení i -tého řádku číslem $t \neq 0$.
2. Přičtení j -tého řádku k i -tému.
3. Záměna pořadí řádků.
4. Přičtení t -násobku j -tého řádku k i -tému.

Definice 2. Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ pak jejich součin $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ je definován

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell} B_{\ell j}.$$

Úloha 1: Pro $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 + 4i \in \mathbb{C}$ spočítejte následující:

- a) $z_1 + z_2$.
- b) $z_1 - z_2$.
- c) $z_1 \cdot z_2$.
- d) $\frac{z_1}{z_2}$.
- e) $|z_1|$.

Úloha 2: Odvoďte vztah mezi algebraickým a goniometrickým tvarem komplexního čísla. Odvoďte vzorec pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Jakou má násobení komplexních čísel geometrickou interpretaci?

Úloha 3: Zapište elementární úpravy jako součin matic.

Úloha 4: Ukažte, že elementární úpravy:

- záměna dvou rovnic a
 - přičtení t násobku j -té rovnice k i -té
- se dají provést pomocí elementárních úprav:
- vynásobení i -té rovnice nenulovým číslem t
 - přičtení j -té rovnice k i -té

Úloha 5: Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

a)

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1$$

b)

$$x_2 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 - x_3 = 1$$

Úloha 6: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$