Úlohy ke cvičení – 10.10.2017

Definice 1. Elementární ekvivalentní úpravy *jsou následující úpravy soustavy rovnic:*

1. *Vynásobení i-tého řádku číslem $t \neq 0$.*
2. *Přičtení j-tého řádku k i-tému.*
3. *Záměna pořadí řádků.*
4. *Přičtení t-násobku j-tého řádku k i-tému.*

Věta 2. *Elementární ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení soustavy rovnic.*

Definice 3. *Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ pak jejich* součin $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ *je definován*

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} B_{\ell j}.$$

Úloha 1: Řešte úlohu nalezení rovnice kružnice obsahující danou trojici bodů $A = (2,1)$, $B = (4,3)$ a $C = (0,7)$ pomocí soustavy lineárních rovnic.

Úloha 2: Určete souřadnice průsečíků trojic rovin $\alpha : x+y+z-10 = 0$, $\beta : x+y-z-4 = 0$, $\gamma : -x+y+z-6 = 0$, $\delta : x-y+z-8 = 0$ a to:

a) $\beta \cap \gamma \cap \delta$

b) $\alpha \cap \gamma \cap \delta$

Úloha 3: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a)

$$\begin{aligned}
3x_1+2x_2+x_3 &= 5\\
2x_1+3x_2+x_3 &= 1\\
2x_1+x_2+3x_3 &= 11\\
5x_1+5x_2+2x_3 &= 6
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5 &= 2\\
2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5 &= 2\\
x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5 &= 1\\
3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5 &= 1
\end{aligned}$$

Úloha 4: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte součin $\mathbf{AB}$.

b) Spočítejte součin $\mathbf{CD}$.

Úloha 5: Zapište elementární úpravy jako součin matic.

Úloha 6: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$