

## Úlohy ke cvičení

**Definice.** *Householderova matice* pro nenulový vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  je definována jako

$$H(a) = I_n - \frac{2}{a^T a} a a^T.$$

*Úloha 1:* Ukažte, že  $H(a)$  je ortogonální matice pro libovolný nenulový vektor  $a \in \mathbb{R}^n$ .

*Úloha 2:* Dokažte, že pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ ,  $\|x\|_2 = \|y\|_2$  platí, že  $y = H(x - y)x$ .

*Úloha 3:* Dle předchozí úlohy dokažte následující tvrzení. Nechť  $x \in \mathbb{R}^n$  a definujme

$$H = \begin{cases} H(x - \|x\|_2 e_1), & \text{pokud } x \neq \|x\|_2 e_1, \\ I_n, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak  $Hx = \|x\|_2 e_1$ .

*Úloha 4:* Ukažte, že pro každou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existuje ortogonální  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a horní trojúhelníková matice  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  s nezápornou diagonálou tak, že  $A = QR$ .

*Úloha 5:* Proveďte QR rozklad následující matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

*Úloha 6:* Nechť  $A = QR$  je QR rozklad. Určete QR rozklad matice  $\alpha A$  pro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Úloha 7:* Nechť  $A_1 = Q_1 R_1$  a  $A_2 = Q_2 R_2$  jsou QR rozklady. Najděte QR rozklady matice

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

*Úloha 8:* Ukažte, že matice  $A_i$  z jednotlivých kroků QR algoritmu jsou podobné matici  $A$ .