Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Mějme matice A a B pozitivně definitní. Ukažte, že i $A+B$ a $cA, c>0$ a A^{-1} jsou pozitivně definitní. Jak je to s pozitivní semidefinitností?

Úloha 2: Najděte všechny matice A pro které platí, že A i $-A$ jsou pozitivně definitní.

Úloha 3: Ukažte, že výraz $\langle x, y\rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar $\langle x, y\rangle = x^T A y$ pro nějakou pozitivně definitní matici A.

Úloha 4: Pomocí Choleského rozkladu invertujte následující matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 5: Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy
$Ax = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Úloha 6: Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymetrická matice ($A^T = -A$). Ukažte, že A^2 je symetrická negativně semidefinitní.

Úloha 7: Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je následující matice pozitivně definitní?

$$\begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$$

Úloha 8: Rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$