Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ukažte, že pokud je λ vlastní číslo matice A pak i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice A.

Úloha 2: Aniž byste je počítali, rozhodněte, zda následující matice má alespoň 2 reálná vlastní čísla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3: Rozhodněte, zda následující matice je regulární.

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 4: Mějme matice A a B pozitivně definitní. Ukažte, že i $A + B$ a $cA, c > 0$ a A^{-1} jsou pozitivně definitní. Jak je to s pozitivní semidefinitností?

Úloha 5: Najděte všechny matice A pro které platí, že A i $-A$ jsou pozitivně definitní.

Úloha 6: Ukažte, že výraz $\langle x, y\rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ pro nějakou pozitivně definitní matici A.

Úloha 7: Pomocí Choleského rozkladu invertujte následující matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 8: Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy
$Ax = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$