

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gram-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi \mathbb{R}^4 .

Úloha 3: Pro matice z 1. příkladu příkladu určete ortogonální projekci \mathbf{p} vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z .

Úloha 4: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Úloha 5: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice \mathbf{A} jsou vzájemně kolmé.

Úloha 6: Ukažte, že ortonormální projekce je lineární zobrazení.

Úloha 7: Spočítejte matici projekce do sloupcového prostoru matice z příkladu 5.