Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$.

Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

Úloha 2: Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a | g_b \rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x) g_b(x) dx$.

Úloha 3: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus).

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

Úloha 4: Dokažte, že pro každé 3 čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

Úloha 5: Ukažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že $n^2 \leq (\sum a_i)(\sum \frac{1}{a_i})$.

Úloha 6: Pro vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ dokažte obě implikace Pythagorovy věty, t.j. pro každé dva vektory $x, y \in V$ platí, že $x \perp y$ právě tehdy když $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Platí tato věta i nad vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$?

Úloha 7: Ukažte, že pokud jsou vektory $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ navzájem na sebe kolmé, pak matice $I - q_1 q_1^T, \ldots, I - q_n q_n^T$ navzájem komutují.