

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechť $|\cdot|$ je norma nad vektorovým prostorem \mathbb{R}^n . Indukovanou normu $\|\cdot\|$ nad maticovým prostorem $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme jako

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n: |x|=1} |Ax|.$$

Ukažte, že

- indukovaná norma je skutečně norma nad prostorem matic,
- pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\|A\| \cdot |x| \geq |Ax|$,
- pro libovolné dvě regulární matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí, že $\|A\| \cdot \|B\| \geq \|AB\|$.

Úloha 2: Ukažte, že vzdálenost vrcholů v grafu je metrika.

Úloha 3: Ukažte, že $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ je norma nad \mathbb{C}^n . A načrtněte jednotkovou kouli pro prostor \mathbb{R}^2 s metrikou indukovanou normou $\|\cdot\|_\infty$.

Úloha 4: Ukažte, že funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je norma – nazývá se norma indukovaná skalárním součinem.

Úloha 5: Ukažte, že

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

je skalární součin na \mathbb{R}^2 a pro $x = (1, 2)^T$ a $y = (3, 4)^T$ spočítejte

- $\langle x, y \rangle$,
- $\|x\|$,
- vzdálenost x a y .

A porovnejte výsledky se standardním skalárním součinem.

Úloha 6: Mějme dva kolmé vektory x a y . Nechť $\|x\| = 12$ a $\|y\| = 5$. Určte $\|x + y\|$ a $\|x - y\|$.

Úloha 7: Ukažte, že na prostoru spojitých reálných funkcí na intervalu $[-1, 1]$ je $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ dobře definovaný skalární součin.