

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme \mathbb{K}^X množinu všech zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

Definujme součet \oplus na \mathbb{K}^X a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

- Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.
- Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?
- Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?
- Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Úloha 2: Určete determinant reálné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3: Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:

a) v \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned} 2x + y + 4z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Úloha 4: Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant

matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

Úloha 5: Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následujícím maticím a to jak nad tělesem reálných čísel tak i nad tělesem \mathbb{Z}_5

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 6: Nalezněte nějakou permutaci p na 10 prvcích takovou, že p^i není identita (značíme $p^i \neq i$) pro všechna $i = 1, \dots, 29$.

Úloha 7: Nechť \mathbf{A}^2 má inverzi \mathbf{B} . Dokažte, že i matice \mathbf{A} je invertovatelná a nalezněte její inverzi.

Úloha 8: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$