

## Domácí úkoly 5 – 22.12.2016

Na úkolech klidně spolupracujte, samotné řešení, ale každý sepište sám. Všechny kroky pořádně zdůvodněte, je to důležitější než správný výsledek. Věty z přednášek/cvičení lze používat bez důkazu, jen napište, co přesně používáte. Řešení pošlete na můj mail v pdf, popřípadě naskanovaný papír. Deadline na úkol není. Body za úkoly budou vyvěšeny na webu, pokud tam nebudete chtít být pod svým jménem, napište k řešení i svoji přezdívku.

**Příklad 1** (2,5 bodů). Nechť  $\alpha(G)$  značí velikost největší nezávislé množiny v grafu  $G$  a  $\Delta(G)$  jeho maximální stupeň. Dokažte

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$$

**Příklad 2** (2,5 bodů). Ukažte, že každý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdu dvakrát.

**Příklad 3** (2,5 bodů). Na šachovnici  $8 \times 8$  je 33 věží. Ukažte, že existuje alespoň 5 věží, které se navzájem neohrožují (dvě věže se ohrožují pokud jsou ve stejném sloupci nebo řádku). Zároveň ukažte, že odhad je těsný. Tedy, že existuje rozestavení 33 věží takové, že pokud vybereme libovolných 6 věží, pak alespoň dvě z nich se navzájem ohrožují.

**Příklad 4** (2,5 bodů). Mějme úplný graf na 7 vrcholech, jehož hrany jsou obarvené červeně a modře. Ukažte, že v tomto grafu můžeme vždy najít modrý trojúhelník nebo červenou cestu na 4 vrcholech (ne nutně indukovanou).