Cvičení 12 – 10.1.2017

Příklad 1. Určete počet relací na n prvcích:

1. Všech,
2. reflexivních,
3. symetrických,
4. antisymetrických.

Příklad 2. Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

Příklad 3. Ukažte, že relace $\Delta_X = \{(x, x)|x \in X\}$ na množině X (takzvaná diagonála) je jediná relace na X, která je ekvivalencí a zároveň uspořádáním.

Příklad 4. Dokažte, že pro každé n a k existuje N takové, že pro libovolnou dvojici obarvení c_1, c_2 hran úplného grafu K_N (tedy $c_1, c_2 : E(K_N) \to [k]$) existuje úplný podgraf velikosti n, který je jednobarevný jak v obarvení c_1, tak v obarvení c_2.

Příklad 5. Ukažte, že obarvíme-li 2 barvami libovolně hrany úplného grafu na alespoň třech vrcholech, potom lze vždy nalézt Hamiltonovskou kružnici takovou, že je buď celá jednobarevná, nebo její hrany lze rozdělit na dvě jednobarevné cesty.

Příklad 6. Určete, kolik různých kružnic obsahuje úplný graf K_n a úplný bipartitní graf $K_{n,n}$.

Příklad 7. Nechť X je konečná množina a $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ je množina podmnožin X uzavřená na symetrickou diferenci (tedy pokud $Y, Z \in \mathcal{A}$, pak $Y \Delta Z \in \mathcal{A}$).

1. Dokažte, že $\mathcal{A}$ se symetrickou diferencí tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.
2. V závislosti na velikosti $\mathcal{A}$ určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může nabývat $|\mathcal{A}|$?