Cvičení 9 – 13.12.2016

Příklad 1. Nechť pro posloupnost $(d_1, \ldots, d_n)$ platí $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že počet stromů na vrcholech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takových, že pro každé i platí $\deg(v_i) = d_i$, je

$$\frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \ldots (d_n - 1)!}$$

Příklad 2. Dokažte, že počet stromů na n vrcholech je n^{n-2}.

Příklad 3. Dokažte, že počet neisomorfních stromů na n vrcholech je nejvýš 4^n.

Příklad 4. Nechť strom má ℓ listů a v vnitřních vrcholů a každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Ukažte, že $\ell = v + 2$.

Příklad 5. Most je taková hrana, že po jejím odebrání se stane graf nesouvislý. Ukažte, že každá kostra souvislého grafu musí obsahovat všechny jeho mosty.

Příklad 6. Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E(G) \setminus E(K)$ existují dvě hrany kostry $e', e'' \in E(K)$ takové, že jak $(K \setminus e') \cup e$ tak $(K \setminus e'') \cup e$ jsou opět kostry grafu G.

Příklad 7. Nalezněte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 2 (na 3 vrcholech) jako indukovaný podgraf.

Příklad 8. Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné?

1. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \to V(H)$ platí, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

2. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \to E(H)$.

3. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:

$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$

4. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ takové, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

5. Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \ldots, n\}$.