

1. Mnoho z vás dokazovalo pomocí napsání rovnosti, kterou jste chtěli ukázat a pak jejím upravováním. Nalezněte chybu v následujícím:

$$\int \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x d\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int x \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

$$0 = 1$$

2. Kolik je ekvivalencí na  $n$  prvkové množině?  
 3. Z  $n$  předmětů vybíráme  $k$ . Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

4. Rozmísťujeme  $k$  kuliček do  $n$  přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

5. Kolik existuje různých správných uspořádání  $n$  párů závorek tak, že závorky lze správně spárovat (dobré uzávorkování)?  
 6. Kolik je v konvexním  $n$ -úhelníku dvojic tětiv, jež se navzájem protínají uvnitř  $n$ -úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?  
 7. Kolik čísel zbyde z  $1, \dots, n$  po vyškrtání násobků 2, 3, 5 a 7? Vyřešte nejprve obecně a pak určete přesný výsledek pro  $n = 999$ .  
 8. Dokažte, že  $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$   
 9. Dokažte:  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

**Odevzdejte do 15. 11. do 12:20.**

- (1 bod) Dokažte formálně i úvahou:  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ .
- (2 body) Sečtete formálně i úvahou  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ .
- (1 bod) Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.
- (1 bod) Kolika způsoby lze dojít na Manhattanu z rohu 5. avenue a 15. street na roh 10. avenue a 23. street, pokud půjdeme pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem?  
(V této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a bez slepých nebo přerušovaných ulic.)
- (1 bod) Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici  $4 \times 4$  tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?
- (4 body) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?
- (a) Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?
  - (b) A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodějnic?
  - (c) A co když máme mít v kruhu 6 vodníků a 12 čarodějnic?