

1. Uvažte tabulku čokolády o  $m \times n$  dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete  $mn$  jednotlivých dílků.

Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

2. Dokažte matematickou indukci:

(a)  $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ .

(b)  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ .

(c)  $\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$ .

(d)  $\sum_{i=1}^n i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$ .

(e)  $4|(6n^2 + 2n)$  ( $4$  dělí  $6n^2 + 2n$ )

(f) Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení  $n$  přímkami je nejvýše  $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$ .

3. Na šachovnici  $2^n \times 2^n$  jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar „L“ a přitom zabírají tři políčka.

4. Najděte relace  $R, S$  na nějaké množině  $X$  takové, že  $R \circ S \neq S \circ R$ .

5. Popište relaci  $R \circ R$ , kde

(a)  $R$  je relace rovnosti “=” na  $\mathbb{N}$ .

(b)  $R$  je relace menší nebo rovno “≤” na  $\mathbb{R}$ .

(c)  $R$  je relace ostře menší “<” na  $\mathbb{R}$ .

(d)  $R$  je relace kolmosti na množině všech přímek v  $\mathbb{R}^2$ .

6. Ukažte, že pro zobrazení  $f : X \rightarrow X$  na konečné množině  $X$  platí, že  $f$  je prosté právě když  $f$  je na.

Platí totéž i pro nekonečné množiny  $X$ ?