Cvičení 11 – 22.12.2015

Příklad 1. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

Příklad 2. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)

Příklad 3. Dokažte, že pro každý graf G platí, že $U \subseteq V(G)$ je nezávislá množina právě tehdy, když $V(G) \setminus U$ (doplněk U) je vrcholové pokrytí. Množina $C \subseteq V(G)$ je vrcholové pokrytí grafu G pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E(G)$ platí, že $u \in C$ nebo $v \in C$.

Příklad 4. Nechť $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v grafu G a $\Delta(G)$ jeho maximální stupeň. Dokažte

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$$

Příklad 5. Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Příklad 6. Dokažte, že graf, jehož vrcholy mají jen sudé stupně, neobsahuje most. Most je hrana, po jejímž odebrání vzroste počet komponent souvislosti.

Příklad 7. Dokažte, že pro každý k-regulární bipartitní graf G platí, že v každém jeho obarvení dvěma barvami je stejně vrcholů první barvy jako vrcholů druhé barvy.

(Graf je k-regulární, když mají všechny jeho vrcholy stupeň k.)

Příklad 8. Ukažte, že pokud je graf G eulerovský, pak i jeho line graf $L(G)$ je eulerovský. Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany grafu G a 2 vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany $e, f \in V(G)$ jsou spojeny pokud hrany e a f sdílejí vrchol.

Příklad 9. Buď $d \in \mathbb{N}$ a $V = \{0, 1\}^d$, tedy V je množina 0/1 vektorů délky d. Grafu na V, ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká *d-dimenzionální krychle*. Jaký je počet vrcholů, počet hran, průměrný stupeň, délka nejdelší indukované cesty a délka nejkratší kružnice?